Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, astfel încât

$$\int_0^n f(x)f(n-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n (f(x))^2\,\mathrm{d}x,$$

oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$. Să se arate că funcţia f este periodică.

Problema 2. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel şi f un endomorfism surjectiv al său, astfel încât $[x, f(x)] = 0$ oricare ar fi $x \in R$, unde $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in R$. Să se arate că:

(a) $[x, f(y)] = [f(x), y]$ şi $x[x, y] = f(x)[x, y]$, oricare ar fi $x, y \in R$;

(b) Dacă R este corp şi f este diferit de identitate, atunci R este comutativ.

Problema 3. Fie $\mathcal{C}$ mulţimea funcţiilor integrabile $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, astfel încât $0 \leq f(x) \leq x$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Definim funcţia $V : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ prin

$$V(f) = \int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2, \quad f \in \mathcal{C}.$$

Să se determine următoarele două mulţimi:

(a) $\{V(f_a) \,|\, 0 \leq a \leq 1\}$, unde $f_a(x) = 0$, dacă $0 \leq x \leq a$, şi $f(x) = x$, dacă $a < x \leq 1$;

(b) $\{V(f) \,|\, f \in \mathcal{C}\}$.

Problema 4. Fie m şi n două numere naturale nenule. Să se determine numărul minim de rădăcini complexe distincte ale polinomului $\prod_{k=1}^{m}(f + k)$, când f parcurge mulţimea polinoamelor de grad n cu coeficienţi complecşi.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.